Differentialgleichungen – Eine Art Script

Martin Dietze

Wedel, den 26. Juli 1996

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Einleitung

Zu diesem Script

Au weia! Was ursprünglich als eine Art Kompendium gedacht war, hat sich so ziemlich von alleine zu einem ausgewachsenen Script gemausert, das ich nun gern dem Rest der Welt zur Verfügung stelle. Dazu natürlich einige Anmerkungen:

- Dies ist eine um einige Beispiele (und Übungsaufgaben) gekürzte Aufarbeitung der Vorlesung bei Prof. Pockrand im Wintersemester 1992/93.
- Ich habe die vorgestellten Verfahren nicht *wörtlich* übernommen, sondern versucht, sie in eine für mich schnell nutzbare Form zu bringen (Unterlagen sind im gr. Matheschein erlaubt).
- Ich übernehme natürlich keine Garantie für Vollständigkeit und Richtigkeit. Eventuelle Mängel werde ich ja selber in der Klausur zu spüren bekommen!

Naja, ich hoffe, irgendjemand sonst kann noch etwas damit anfangen, ab dafür!

1. Definitionen und Begriffe

1.1 Art der Differentialgleichung

1.1.1 Allgemeine Definition

Jede Gleichung, die eine Beziehung zwischen einer abhängigen Variablen y, einer (oder mehreren) unabhängigen Variablen $x(x_i)$ und ihren Differenaialquotienten darstellt, wird als Differentialgleichung bezeichnet.

1.1.2 Gewöhnliche Differentialgleichung

Die gewöhnliche Differentialgleichung hat *eine* unabhängige Variable:

$$\text{Implizite Gestalt} \quad : \qquad F\left[x, y(x), \tfrac{dy}{dx}, \tfrac{d^2y}{dx^2}, ..., \tfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{Explizite Gestalt} \quad : \qquad \tfrac{d^ny}{dx^n} = f\left[x, y(x), \tfrac{dy}{dx}, \tfrac{d^2y}{dx^2}, ..., \tfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] \tag{1.2}$$

1.1.3 Partielle Differentialgleichung

Die partielle Differentialgleichung hat *mehrere* unabhängige Variablen x_i, mit $i = 1, ..., m$:

$$\text{Implizite Gestalt} \quad : \qquad F\left[x_i, y(x_i), \tfrac{\partial y}{\partial x_i}, \tfrac{\partial^2 y}{\partial x_i x_k}, ..., \tfrac{\partial^n y}{\partial x_m^n}\right] = 0 \tag{1.3}$$

1.1.4 Ordnung einer Differentialgleichung

Die Ordnung der höchsten in einer Differentialgleichung auftretenden Ableitung gibt die Ordnung der Differentialgleichung an.

1.1.5 Grad einer Differentialgleichung

Läßt sich die Differentialgleichung als Polynom von y und den Ableitungen schreiben, gibt die Summe der Exponenten von y und den Ableitungen in *einem* Glied den Grad der Differentialgleichung an. Differentialgleichungen vom 1. Grade werden als lineare Differentialgleichungen bezeichnet.

1.2 Lösen von Differentialgleichungen

1.2.1 Lösung einer Differentialgleichung

Eine *Funktion* $y = y(x)$ (bzw. $y = y(x_i)$) heißt Lösung (Integral, Integralkurve, Grundkurve, Grundgleichung) einer gewöhnlichen (bzw. partiellen) Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

1.2.2 Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

Die *allgemeine* Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n unabhängige, freie Integrationskonstanten als Parameter.

1.2.3 Spezielle oder partikuläre Lösung einer Differentialgleichung

Eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung erhält man aus der allgemeinen Lösung, indem durch n Zusatzbedingungen den Integrationskonstanten feste Werte zugeordnet werden.

1.2.4 Singuläre Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Eine Funktion $y = y(x)$ ist *singuläre* Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt, aber nicht aus der allgemeinen Lösung durch spezielle Parameterwahl gewonnen werden kann.

1.3 Sonstiges

1.3.1 Anfangswertproblem

Werden in der allgemeinen Lösung $y = y(x)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung die n Integrationskonstanten dadurch festgelegt, daß die Werte der Lösungsfunktion sowie ihrer $n - 1$ Ableitungen für *einen* Wert der unabhängigen Variablen $x = x_0$ vorgeschrieben werden (d.h. $y(x_0), y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0)$) werden vorgeschrieben, so spricht man von einem Anfangswertproblem.

1.3.2 Randwertproblem

Werden in der allgemeinen Lösung $y = y(x)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung die n Integrationskonstanten dadurch festgelegt, daß die Werte der Lösungsfunktion für n *Werte* der unabhängigen Variablen $x = x_1, x = x_2, ..., x = x_n$ vorgeschrieben werden (d.h. $y(x_1), y(x_2), ..., y(x_n)$) werden vorgeschrieben, so spricht man von einem Randwertproblem.

1.3.3 Eigenwertproblem

Tritt bei einer Randwertaufgabe ein Parameter λ in der Differentialgleichung (oder in den Randbedingungen) auf, so kann man nach denjenigen Werten λ fragen, für die die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen ($y \neq 0$) hat. Diese Lösungen heißen dann Eigenfunktionen, die zugehörigen Werte von λ Eigenwerte.

Beispiel dazu:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Differentialgleichung:} & \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = 0 & \\
\text{Allgemeine Lösung:} & x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t & \\
\text{Randwerte:} & x(t=0) = 0; x(t=\tau) = 0 & \\
 & x(0) = 0 & \Rightarrow C_1 = 0 \\
 & x(\tau) = 0 & \Rightarrow C_2 \sin \omega_0 t = 0 \\
 & & \Rightarrow \omega_0 = n\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{T}
\end{array}
$$

Fazit: Bei den gegebenen Randwerten ist die allgemeine Lösung nur dann gültig, wenn ω_0 bestimmte Werte hat.

Teil II

Lösung von Differentialgleichungen

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Richtungsfeld und Isoklinen

2.1.1 Was sind Isoklinen?

Isoklinen sind Verbindungslinien aller Punkte mit gleichen Richtungselementen, d.h. es gilt: $y' = f(x,y) = const.$

Wenn wir in einer Differentialgleichung die erste Ableitung $y' = const = C$ setzen, erhalten wir eine Schar von Kurven $y = f(x, C_i)$ über die verschiedenen Werte von $C = C_1, C_2, ...$

2.1.2 Anwendung von Isoklinen

In ein Koordinatensystem gezeichnet erscheinen Kurven, deren jeweils zugehöriger Parameter C_i gleich der Steigung in der Schar von Lösungsfunktionen entlang dieser Kurve ist.

Man erhält die Lösungsfunktion, indem man Kurven durch diese Kurvenschar zieht, und zwar so, daß diese Kurve die Steigungen abhängig von den geschnittenen Kurven der Kurvenschar ändert.

Bei einfacheren Isoklinen-Kurvenscharen (Geraden oder Kreise etc.) kann auch recht einfach ein Zusammenhang zwischen benachbarten Kurven aufgestellt werden, so daß eine klare mathematische Beschreibung der Lösungsfunktion möglich wird.

2.2 Trennung der Variablen

2.2.1 Allgemein

Bei diesem Verfahren wird die Differentialgleichung so umgeformt, daß man sie anschließend durch Integrieren lösen kann.

Voraussetzung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{mit } g(y) \neq 0 \tag{2.1}$$

2.2.2 Das Verfahren

Lösungsweg:

1. Umformen : $g(y)dy = f(x)dx$
2. Integrieren : $\int g(y)dy = \int f(x)dx$
3. Ergebnis : $G(y) = F(x) + C_2 - C_1 = F(x) + C^*$

Wir erhalten also einen Ausdruck, der keine Ableitungen von y enthält, der aber noch nach y aufgelöst werden muß.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
(1 - y - x^2 + yx^2)y' &= 1 - x \\
(x^2 - 1)(y - 1)y' &= 1 - x \\
(y - 1)y' &= \frac{1 - x}{x^2 - 1} \\
(y - 1)y' &= \frac{1 - x}{(x + 1)(x - 1)} \\
(y - 1)y' &= -\frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} \\
(y - 1)dy &= -\frac{1}{x + 1}dx \\
\int (y - 1)dy &= -\int \frac{1}{x + 1}dx \\
\frac{1}{2}y^2 - y + C_1 &= -\ln|x + 1| + C_2 \\
y^2 - y &= -2\ln|x + 1| + C^* \\
y^2 - y + 2\ln|x + 1| - C^* &= 0 \\
y_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 2\ln|x + 1| + C^*}
\end{aligned}$$

2.3 Integration durch Substitution

2.3.1 Allgemein

Wenn eine Differentialgleichung nicht trennbar ist, wird sie es möglicherweise durch eine geschickte Substitution. Dazu gibt es einige Standard-Substitutionen für bestimmte Ausgangsgleichungen.

Nachdem die durch Substitution entstandene Ausgangsgleichung integriert worden ist, wird einfach rücksubstituiert – und fertig ist die Laube!

2.3.2 Das Verfahren

Für die folgenden Formen gibt es feste Substitutionen:

Ausgangsgleichung:	Damit korrespondierende Substitution:
$y' = f(\frac{y}{x})$	$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{f(u)-u(x)}{x}$
$y' = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a + bf(u)$
$y' = y^2(f(xy)$	$u = xy \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}(u + u^2 f(u))$
$yy' = f(\frac{y^2}{x})$	$u = \frac{y^2}{x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{2f(u)-u}{x}$
$y' + \frac{y}{x} = \varphi(x)f(xy)$	$u = xy \quad \Rightarrow \quad u'(x) = (x\varphi(x))f(u)$

Nach Umformung hin nach u' kann nun durch Trennung der Variablen die Gleichung gelöst und dann zurücktransformiert werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (y^2 - x^2)dx - 2xydy &= 0 \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}) \\ u + xu' &= \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u}) \\ -\frac{2u}{u^2+1}du &= \frac{1}{x}dx \\ -\ln|n^2 + 1| + C_1 &= \ln|x| + C_2 \end{aligned}$$

2.4 Lineare Differentialgleichungen

2.4.1 Allgemein

Es gibt zwei Arten von linearen Differentialgleichungen, *homogene* und *inhomogene*. Besonders betrachtet werden hier jetzt vor allem die inhomogenen Differentialgleichungen, da diese nicht wie bisher durch einfache Trennung der Variablen etc. gelöst werden können.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung hat die folgende Struktur:

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{2.2}$$

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung liegt immer dann vor, wenn die *Störfunktion* $g(x)$ ungleich Null ist.

2.4.2 Lösungsansatz von Lagrange: Variation der Konstanten

Die Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung erfolgt in zwei Schritten:

1. Zuerst wird die Störfunktion $g(x)$ formal gleich Null gesetzt und die so entstandene *homogene* Differentialgleichung mit einem der bereits beschriebenen Verfahren gelöst.

2. Dann wird die gefundene homogene Lösung mit einem Faktor (in Wirklichkeit: Funktion!) C_x versehen und in der ursprünglichen Gleichung jeweils für y und y' (ableiten!) eingesetzt. Nach Auflösen nach C_x und Integrieren kann y bestimmt werden.

Die Ausdrücke, die bei diesem Verfahren entstehen, folgen einem festen Schema und sind daher bestens geeignet für Spickzettel.

Vorbereitende Schritte:

$$\begin{aligned}
y_h' + f(x)y_h &= 0 && (2.3)\\
\Rightarrow\ y_h &= ce^{-\int f(x)dx} \quad c \in \mathcal{R} && (2.4)\\
y &= C_x y_h = c_x e^{-\int f(x)dx} \quad c \in \mathcal{R} && (2.5)\\
\Rightarrow\ y' &= C_x' e^{-\int f(x)dx} - C_x f(x) e^{-\int f(x)dx} && (2.6)\\
& && (2.7)
\end{aligned}$$

Einsetzen und Auflösen:

$$\begin{aligned}
g(x) &= C_x' e^{-\int f(x)dx} - C_x f(x) e^{-\int f(x)dx} + C_x f(x) e^{-\int f(x)dx} && (2.8)\\
&= C_x' e^{-\int f(x)dx} && (2.9)\\
\Rightarrow\ C_x &= \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx + c = \int \frac{g(x)}{y_h^*(x)} dx \quad (y_h \textit{ ohne } \text{Konstante } c\ !) && (2.10)\\
\Rightarrow\ y &= C_x y_h^* = \left(\int g(x) e^{\int f(x)dx}) dx + c \right) e^{-\int f(x)dx} \quad c \in \mathcal{R} && (2.11)
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x} &= \cos x \\
y_h' &= -\frac{y}{x} \\
\Rightarrow \quad y_h &= \frac{c}{x} \\
y &= \frac{C_x}{x} \\
y' &= \frac{C_x' x - C_x}{x^2} \\
C_x &= \int \frac{g(x)}{y_h^*} dx + C \\
&= \cos x + x \sin x + C \\
\Rightarrow \quad y &= \frac{\cos x + x \sin x}{x} + \frac{C}{x} \\
&= y_p + y_h
\end{aligned}
$$

2.5 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

2.5.1 Allgemein

Ein weiterer Sonderfall sind lineare Differentialgleichungen mit *konstanten Koeffizienten*:

$$y' + ay = g(x) \tag{2.12}$$

Hier kann wieder etwas Arbeit gespart werden, wenn die Störfunktion $g(x)$ eine eine bestimmte Form hat.

2.5.2 Lösung durch Methode der unbestimmten Koeffizienten

Grundsätzlich wird wie bisher zunächst die *homogene* Lösung $y_h(x)$ berechnet. Anschließend wird aus der Liste für die gegebene Störfunktion der passende Ansatz für die *partikuläre* Lösung $y_p(x)$ herausgesucht, die dann durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden kann. Das Ergebnis ist die Summe beider Lösungen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{2.13}$$

Dabei existieren Ansätze für folgende Störfunktionen:

Störfunktion:	Lösungsansatz:
$g(x) = b_0$	$y_p(x) = c_0$
$g(x) = b_1 x + b_0$	$y_p(x) = c_1 x + c_0$
$g(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + +b_0$	$y_p(x) = c_n x^n + ... + c_1 x + c_0$
$g(x) = A\sin(\omega x)$ $g(x) = B\cos(\omega x)$ $g(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$	$y_p(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$ oder $y_p(x) = C\sin(\omega x + \varphi)$ oder $y_p(x) = D\cos(\omega x + \psi)$
$g(x) = Ae^{bx}$	$y_p(x) = Ce^{bx}$ für $b \neq -a$ $y_p(x) = Cxe^{bx}$ für $b = -a$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
y' - y &= \cos x \\
\Rightarrow \quad y_h &= ce^x \\
g(x) &= \cos x \\
\Rightarrow \quad y_p &= c_1 \sin x + c_2 \cos x \\
y_p' &= c_1 \cos x - c_2 \sin x \\
\Rightarrow \quad (c_1 - c_2)\cos x - (c_1 + c_2)\sin x &= \cos x \\
\text{Koeffizientenvergleich:} \quad & \quad c_1 = \frac{1}{2}; \quad c_2 = -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad y &= ce^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)
\end{aligned}$$

2.6 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor

2.6.1 Allgemein

Gegeben sind eine Funktion $z = F(x, y)$ und ihr *totales Differential*:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = N(xy)dx + M(xy)dy$$

Dabei gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x \partial y}dxdy = \frac{\partial F}{\partial y \partial x}dydx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2.6.2 Exakte Differentialgleichungen

Dieser Zusammenhang kann zum Lösen von Differentialgleichungen genutzt werden. Eine Differntialgleichung heißt *exakte Differentialgleichung*, wenn sie aus den oben beschriebenen $M(xy)$ und $N(xy)$ besteht:

$$M(xy)dx + N(xy)dy = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.14}$$

Eine solche *exakte Differentialgleichung* kann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x} && (2.15)\\
\Rightarrow F &= \int M(x,y)dx + C(y) && (2.16)\\
N(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + C(y)\right) && (2.17)\\
&= \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx + \frac{\partial C(y)}{\partial y} && (2.18)\\
\Rightarrow C(y) &= \int \left(N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right) dy && (2.19)\\
&= \int N(x,y)dy - \int\int \frac{\partial M}{\partial y}dxdy && (2.20)\\
F &= \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int\int \frac{\partial M}{\partial y}dxdy && (2.21)
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x(x+2y)}{y^2-x^2}\\
x(x+2y)dx + (x^2-y^2)dy &= 0 \;=\; Mdx + Ndy\\
\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x} \;=\; 2x\\
M(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x} \;=\; x(x+2y)\\
\Rightarrow \quad F &= \int x(x+2y)dx + C(y)\\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2y + C(y)\\
N(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial y} \;=\; x^2-y^2\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{3}x^3 + x^2y + C(y))\\
\Rightarrow \quad x^2-y^2 &= x^2 + \frac{\partial}{\partial y}C(y)\\
\frac{\partial}{\partial y}C(y) &= -y^2\\
\Rightarrow \quad C(y) &= -\frac{y^3}{3}\\
F &= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - \frac{y^3}{3} \;=\; c
\end{aligned}$$

2.6.3 Der integrierende Faktor

Eine Differentialgleichung $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, die *nicht* exakt ist, kann unter Umständen durch einen *integrierenden Faktor* $\mu(x,y)$ zu einer gemacht werden (der Faktor ändert die *Lösung* der Gleichung nichts):

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(d,y)dy = 0 \quad \text{exakt!} \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu N}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu \tag{2.23}$$

Daraus erhalten wir die Bestimmungsgleichung für μ:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} \tag{2.24}$$

Um nun μ berechnen zu können, muß zunächst herausgefunden werden, ob μ nur von x, nur von y oder von z abhängt. Relevant sind hier nur die ersten beiden Möglichkeiten:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{2.26}$$

Ist der obere Ausdruck eine Funktion allein von x bzw. der untere eine Funktion allein von y, kann μ mit der entsprechenden der folgenden Formeln berechnet werden:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} \tag{2.27}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy} \tag{2.28}$$

Beispiel:

$$(x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0 = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 3x^2 \tag{2.30}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{2.31}$$

$$= -\frac{2x}{1+x^2} = f(x) \tag{2.32}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} \tag{2.33}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \tag{2.34}$$

$$\frac{x^2y + y + 1}{1+x^2}dx + \frac{x + x^3}{1+x^2}dy = 0 \quad \text{(Neue Dgl.)} \tag{2.35}$$

$$(y + \frac{1}{1+x^2})dx + xdy = 0 = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \tag{2.37}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Exakte Differentialgleichung!} \tag{2.38}$$

2.7 Differentialgleichung von Bernoulli

2.7.1 Allgemein

Gegeben ist eine Differentialgleichung der folgenden Form:

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0 \tag{2.39}$$

2.7.2 Lösungsmethode

Gelöst wird die Gleichung durch eine Substitution:

$$\begin{aligned} y &= z^{\frac{1}{1-n}} && (2.40)\\ \Rightarrow y' &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}}\, z' && (2.41) \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z' + p(x) z^{\frac{1}{1-n}} + q(x) z^{\frac{n}{1-n}} &= 0 && (2.42)\\ \Rightarrow \quad \frac{1}{1-n} z' + p(x)z + q(x) = 0 & && (2.43) \end{aligned}$$

Und feddich!

Beispiel:

$$\begin{aligned} u' \sin x + y \cos x + y^3 \cot x &= 0\\ n = 3 \quad \Rightarrow y &= z^{-\frac{1}{2}}\\ \Rightarrow y' &= -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z'\\ -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' \sin x + z^{-\frac{1}{2}} \cos x + z^{-\frac{3}{2}} \cot x &= 0\\ z' \sin x - 2z \cos x - 2 \cot x &= 0\\ (...) & \qquad \text{(Variation d. Konstanten)}\\ z &= -\frac{2}{3 \sin x} + c \sin^2 x\\ \Rightarrow \quad y &= \frac{1}{\sqrt{c \sin^2 x - \frac{2}{3} \sin^{-1} x}} \end{aligned}$$

2.8 Singuläre Lösungen

2.8.1 Gleichungen höheren Grades in y'

Bei Differentialgleichungen, in denen y' in einer Potenz größer als 1 vorkommt, können *singuläre Lösungen* gefunden werden, indem die Gleichung als quadratische (oder was auch immer) Gleichung von y' gelöst wird.

Aus den dabei gefundenen Lösungen können dann für sich die Lösungsgleichungen berechnet werden. Die *allgemeine* Lösung kann dann so geschrieben werden:

$$(y - f_1(x))(y - f_2(x))...(y - f_n(x)) = 0 \tag{2.44}$$

Einige Gleichungen können eine Reihe von Lösungen ergeben, die von den Werten von x und y abhängen. Hier ist Improvisieren angesagt. Unter Umständen kann hier eine geschickte Substitution das Übel beseitigen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} xy'^2 - 2yy' + x &= 0 && (2.45)\\ y'^2 - 2\frac{y}{x}y' + 1 &= 0 && (2.46)\\ y'_{1,2} &= \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} && (2.47)\\ & && (2.48) \end{aligned}$$

Hier gibt's ein Problem: Die Anzahl der Lösungen hängt vom Wert von $\frac{y}{x}$ ab. Lösung ist hier die Substitution:

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu'$$

$$\begin{aligned} u + xu' &= u \pm \sqrt{u^2 - 1} && (2.49)\\ \frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 1}} &= xdx && (2.50) \end{aligned}$$

Naja, was das jetzt bringt, weiß ich leider auch nicht!

2.8.2 Hüllenkurve und singuläre Lösungen

Indirekter Weg

Gegeben ist eine Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ und ihre Lösung $F(x, y, c) = 0$. Die Gleichung, die ihre Hüllenkurve beschreibt, könnte zu einer oder mehreren singulären Lösungen führen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} &= 0 && (2.51)\\ \Rightarrow \; c &= g(x, y) && (2.52)\\ S(x, y, g(x, y)) &= 0 && (2.53) \end{aligned}$$

Ob $S(x, y, g(x, y))$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß allerdings noch geprüft werden.

2.8.3 Direkter Weg

Das Ganze kann auch ohne die Kenntnis der Lösung gemacht werden. Ausgangspunkt ist eine in y' nichtlineare Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$. Die sonst mehrfachen Richtungselemente fallen zusammen bei:

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \tag{2.54}$$

In diesem Fall kann durch Einsetzen des oben entstandenen Ausdrucks y' in der Ursprungsgleichung eleminiert werden:

$$D(x,y) = 0 \tag{2.55}$$

Dieser Ausdruck *kann* eine Lösung der Differentialgleichung sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
xy'^2 - 2yy' + x &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y'} &= 2xy' - 2y = 0 \\
\Rightarrow \quad y' &= \frac{y}{x} \\
D(x,y) &= x\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2y\frac{y}{x} + x \;=\; 0 \\
y &= \pm x
\end{aligned}$$

Nach indirekter Methode:

$$\begin{aligned}
F(x,y,c) &= x^2 - 2cy + x^2 \;=\; 0 \\
\frac{\partial F}{\partial c} &= -2y + 2c \;=\; 0 \\
\Rightarrow \quad y &= c \\
S(x,y) &= x^2 - 2y^2 + y^2 \;=\; 0 \\
y &= \pm x
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differntialgleichung zeigt: $\pm x$ ist eine singuläre Lösung.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

3.1 Vorbemerkungen

Die hier behandelten Differentialgleichungen höherer Ordnung haben die folgende allgemeine Form:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

Da hier höhere Ableitungsstufen von y vorkommen, erhalten wir hier als Lösung eine *Kurvenschar*, die durch die Konstanten $c_1, ..., c_n$ parametrisiert sind.
Ein Spezialfall sind *lineare* Differentialgleichungen[1]:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = g(x) \tag{3.2}$$

Wiederum ein Spezialfall *davon* ist die Gleichung einer Schwingung:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{3.3}$$

3.2 Spezialfälle: In der Ordnung reduzierbare Differentialgleichungen

3.2.1 Erster Spezialfall

Voraussetzung

Ein solcher Spezialfall ist gegeben bei einer Differentialgleichung der Form:

$$y'' = f(x, y') \tag{3.4}$$

Sie läßt sich reduzieren zu einer Differentialgleichung erster Ordnung in y.

[1] Ups! Hier war Herr Pockrand wohl nicht ganz konsistent. Schätze, er meint hier die Tatsache, daß zwar höhere Ableitungen aber keine höheren Potenzen von y vorkommen!

Lösungsweg

Zur Lösung dient eine Substitution:

$$y' = p \implies y'' = p' \tag{3.5}$$

Nach Einsetzen erhalten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung $p' = f(x, y)$, die durch Integration gelöst werden kann:

$$y(x) = \int p(x)dx \tag{3.6}$$

Spezialfälle hiervon sind Gleichungen, die sofort durch Trennung der Variablen gelöst werden können:

$$y'' = f(x); \quad y^{(n)} = f(x); \quad y'' = f(y') \tag{3.7}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
y'' &= 2\sqrt{1+y'^2} \\
\Rightarrow p' &= 2\sqrt{1+p^2} \\
\frac{dp}{2\sqrt{1+p^2}} &= dx \\
\frac{1}{2}\ln|p+\sqrt{1+p^2}| &= x + c_1 \;=\; \sinh^{-1} p \\
p &= \sinh(2(x+c_1)) \;=\; y' \\
\Rightarrow y &= \frac{1}{2}\cosh(2x+k_1) + k_2
\end{aligned}$$

3.2.2 Zweiter Spezialfall

Ein weiterer Spezialfall ist gegeben bei der Form:

$$y'' = f(y, y') \tag{3.8}$$

Auch hier läßt sich durch eine Substitution eine Differentialgleichung ersten Grades in y erzeugen.

Lösungsweg

Zur Lösung dient die Substitution:

$$y' = p(y); \implies y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \tag{3.9}$$

Auch hier gibt es einen Spezialfall, der sofort durch Trennung der Variablen gelöst werden kann:

$$y'' = f(y) \tag{3.10}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\omega^2 x = \frac{k}{m}x && (3.11)\\
p(x) &= \dot{x} = \frac{dx}{dt} && (3.12)\\
\ddot{x} &= -\omega^2 x = \frac{dp}{dx}p && (3.13)\\
pdp &= -\omega^2 x dx && (3.14)\\
\Rightarrow \ p &= \pm\sqrt{c_1 - \omega^2 x^2} && (3.15)\\
x(0) = x_0 \ &\text{und} \ \dot{x}(0) = 0 && (3.16)\\
\Rightarrow \ 0 &= \sqrt{c_1 - \omega^2 x_0^2} && (3.17)\\
c_1 &= \omega^2 x_0^2 && (3.18)\\
\Rightarrow \ p &= \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x^2} = \dot{x} && (3.19)\\
\omega dt &= \frac{dx}{\pm\sqrt{x_0^2 - x^2}} && (3.20)\\
\Rightarrow \ (\omega t + c_2)_{1,2} &= \begin{cases} + & : \ \arcsin\frac{x}{x_0} \\ - & : \ \arccos\frac{x}{x_0} \end{cases} && (3.21)\\
x &= x_0\cos(\omega t + c_2) && (3.22)\\
x(0) = x_0 \ &\Rightarrow \ c_2 = 0 && (3.23)\\
x &= x_0\cos\omega t && (3.24)
\end{aligned}$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit linearen Koeffizienten

3.3.1 Allgemein

Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat die folgende Form:

$$y'' + ay' + by = g(x) \tag{3.25}$$

Sie besteht wie schon die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung aus der *homogenen Gleichung* und der *Störfunktion*.

3.3.2 Lösungsansatz

Vorgehensweise

Wie schon bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist hier die Lösung die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen und der speziellen Lösung der inhomogenen

Differentialgleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{3.26}$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

Gesucht werden hier genaugenommen *zwei* Lösungen, die zusammen die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bilden:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{3.27}$$

Allgemeine Lösung Beide Lösungen müssen für sich die homogene Differentialgleichung erfüllen. Es handelt sich bei zwei Lösungen dann um die gesuchte allgemeine Lösung, wenn die *Wronski-Determinante* ungleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0 \tag{3.28}$$

Exponentialansatz Um die beiden Lösungen zu finden, kann der *Exponentialansatz* verwendet werden: $y = e^{\lambda x}$:

$$\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= 0 && (3.29)\\
\Rightarrow \quad \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} &= 0 && (3.30)\\
\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \qquad \text{(Charakteristische Gleichung)} && (3.31)\\
\lambda_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} && (3.32)\\
&= -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} && (3.33)\\
D &= a^2 - 4b \ \ \text{(Diskriminante)} && (3.34)
\end{aligned}$$

Die Art der zwei Lösungen hängt vom Wert der *Diskriminante* ab:

$D > 0$: 2 verschiedene reelle Lösungen λ_1, λ_2:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{3.35}$$

$D = 0$: 2 gleiche reelle Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$. y_1 ist jetzt bekannt, y_2 muß noch bestimmt werden. Nach (etwas länglicher) Berechnung über Variation der Konstanten ist $y_2 = xe^{-\frac{a}{2}}$ und wir erhalten:

$$y = c_1 e^{-\frac{a}{2}} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}} \tag{3.36}$$

$D < 0$: Das Ganze wird *komplex*. Durch Anwendung der Eulerschen Formeln ergibt sich für y:

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} \left(c_1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}x\right)\right) \tag{3.37}$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Zur Bestimmung der *partikulären* Lösung y_p gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

1. Methode der unbestimmten Koeffizienten. Dies ist die einfacherer Möglichkeit, ist aber nicht immer möglich.
2. Methode der Variation der Konstanten. Dies ist die aufwendigere Möglichkeit, ist aber immer möglich.

Für den ersten Lösungsansatz steht wieder eine Tabelle mit den möglichen Paaren zur Verfügung:

Störfunktion:	Lösungsansatz:
$g(x) = P_n(x)$	$y_p(x) = Q_n(x) \quad b \neq 0$ $y_p(x) = x^n Q_n(x) \quad a \neq 0;\ b = 0$ $y_p(x) = x^2 Q_n(x) \quad a = b = 0$
$g(x) = A\sin(\omega x)$ $g(x) = B\cos(\omega x)$ $g(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$	$y_p(x) = C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x)$, $y_p(x) = C\sin(\omega x + \varphi)$ oder $y_p(x) = D\cos(\omega x + \psi)$, wenn $j\omega$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. $y_p(x) = x\,(C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x))$, $y_p(x) = Cx\sin(\omega x + \varphi$ oder $y_p(x) = Dx\cos(\omega x + \psi)$, wenn $j\omega$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Zu bestimmen: $\frac{C_1}{C_2}$ bzw. $\frac{C}{\varphi}$ bzw. $\frac{D}{\psi}$
$g(x) = e^{cx}$	$y_p(x) = Ae^{cx}$, wenn c *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung ist, $y_p(x) = Axe^{cx}$, wenn c *einfache* Lösung der charakteristische Gleichung ist, $y_p(x) = Ax^2e^{cx}$, wenn c *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Zu bestimmen: A.
$g(x) = P_n(x)e^{cx}\sin(\omega x)$ $g(x) = P_n(x)e^{cx}\cos(\omega x)$	$y_p(x) = e^{cx}(Q_n(x)\sin(\omega x) + R_n(x)\cos(\omega x))$, wenn $c+j\omega$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, $y_p(x) = xe^{cx}(Q_n(x)\sin(\omega x) + R_n(x)\cos(\omega x))$, wenn $c+j\omega$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Zu bestimmen: Koeffizienten der Polynome $Q_n(x)$ und $R_n(x)$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x &= 2\sin(5t) \quad \text{mit: } x(\pi) = 0; \;\; \dot{x}(\pi) = 1 \\
x_h &= e^{\lambda t} \\
\Rightarrow \;\; \lambda^2 + 2\lambda + 17 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= -1 \pm \frac{\sqrt{4-68}}{2} \\
\Rightarrow \;\; x_h &= e^{-t}(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)) \\
g(t) &= 2\sin(5t) \\
x_p &= C_1 \sin(5t) + C_2 \cos(5t) \quad \text{(aus Liste)} \\
\dot{x}_p &= 5C_1 \cos(5t) - 5C_2 \sin(5t) \\
\ddot{x}_p &= -25C_1 \sin(5t) - 25C_2 \cos(5t) \\
2\sin(5t) &= (-25C_1 - 10C_2 + 17C_1)\sin(5t) + (-25C_2 + 10C_1 + 17C_2)\cos(5t) \\
\Rightarrow \;\; C_2 = \frac{4}{41} & \quad C_1 = \frac{5}{41} \\
x &= e^{-t}(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)) + \frac{5}{41}\sin(5t) + \frac{4}{41}\cos(5t)
\end{aligned}$$

3.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten

3.4.1 Allgemein

Die allgemeine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten hat den folgenden Aufbau:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{3.38}$$

Wie schon bisher ist auch hier wieder die Lösung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen und der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.

3.4.2 Lösungsansatz

Homogene Differentialgleichung

Zum Lösen der homogenen Differentialgleichung braucht man vor allem Intuition. Allerdings gibt es, wenn man nicht gleich beide Lösungen durch Raten herausbekommen hat, eine Methode, aus einer Lösung auch die andere zu erhalten.

Finden der zweiten Lösung Eine bekannte Lösung der homogenen Differentialgleichung sei $y_1(x)$. Wir fordern nun eine Funktion $u(x)$, so daß gilt:

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \tag{3.39}$$

$$y_2'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1(x) \quad (3.40)$$
$$y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \quad (3.41)$$

Durch Einsetzen in die Ursprungsgleichung erhalten wir nach einiger Rechnerei:

$$u''(x)(a_2(x)y_1(x)) + u'(x)(2a_2(x)y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) = 0 \quad (3.42)$$

Über diese Gleichung kann nun $u(x)$ bestimmt werden und daraus dann y_2.

Eulersche Differentialgleichung Ein Sonderfall ist die Eulersche Differentialgleichung:

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0 \quad (3.43)$$

Hier kann ein Potenzansatz verwendet werden:

$$y = x^\lambda \quad (3.44)$$
$$y' = \lambda x^{\lambda-1} \quad (3.45)$$
$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \quad (3.46)$$

Nach Einsetzen erhalten wir:

$$a_2x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + a_1x\lambda x^{\lambda-1} + a_0x^\lambda = 0 \quad (3.47)$$
$$\Rightarrow a_2x\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.48)$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{a_1-a_2}{a_2}\lambda + \frac{a_0}{a_2} = 0 \quad (3.49)$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{a_1-a_2}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_2}\right)^2 - 4\frac{a_0}{a_2}}}{2} \quad (3.50)$$

Wir müssen nun wieder unterscheiden, welchen Wert die *Diskriminante*[2] hat:

$D > 0$: 2 verschiedene reelle Lösungen:

$$y = c_1x^{\lambda_1} + c_2x^{\lambda_2} \quad (3.51)$$

$D = 0$: 2 gleiche reelle Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = c_1x^{\lambda_1}$. y_1 ist jetzt bekannt, y_2 muß noch bestimmt werden. Nach (etwas länglicher) Berechnung über Variation der Konstanten ist $y_2 = \ln xx^{\lambda_1}$ und wir erhalten:

$$y = c_1x^{\lambda_1} + c_2x^{\lambda_1}\ln x \quad (3.52)$$

$D < 0$: Das Ganze wird *komplex*. Durch Anwendung der Eulerschen Formeln ergibt sich für y:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{a_1-a_2}{2a_2}}(c_1\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_2}\right)^2 - 4\frac{a_0}{a_2}}\ln x) \\ &\quad +c_2\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_2}\right)^2 - 4\frac{a_0}{a_2}}\ln x)) \end{aligned} \quad (3.53)$$

[2] Das unter der Wurzel

Inhomogene Differentialgleichung

Neben der allgegenwärtigen Intuition[3] gibt es auch für diesen Fall die Möglichkeit der *Variation der Konstanten.* Das Vorgehen ist folgendes:

$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sei die wie auch immer ermittelte allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Wir fordern nun:

$$\begin{aligned} y_p &= C_{x_1} y_1 + C_{x_2} y_2 && (3.54)\\ \Rightarrow \quad y_p' &= C_{x_1}' y_1 + C_{x_2}' y_2 + C_{x_1} y_1' + C_{x_2} y_2' && (3.55) \end{aligned}$$

Hierbei gilt nun noch eine Zusatzbedingung:

$$C_{x_1} y_1 + C_{x_2} y_2 = 0 \tag{3.56}$$

Dies ist gleichzeitig die *1. Bestimmungsgleichung* für $C_{x_{1,2}}$.

Durch Berücksichtigung der Zusatzbedingung erhalten wir:

$$y_p'' = C_{x_1}' y_1' + C_{x_2}' y_2' + C_{x_1} y_1'' + C_{x_2} y_2'' \tag{3.57}$$

Nach Einsetzen des bisher Berechneten in die ursprüngliche Differentialgleichung erhalten wir (es fällt einiges weg):

$$C_{x_1}' y_1' + C_{x_2}' y_2' = \frac{g(x)}{a_2(x)} \tag{3.58}$$

Dies ist nun unsere *2. Bestimmungsgleichung.*

Um die Sache jetzt noch schön kompliziert zu machen, können wir aus den beiden Bestimmungsgleichungen komplette Formeln für die beiden C_x herleiten:

$$\begin{aligned} C_{x_1} &= -\int \frac{y_2 g(x)}{(y_1 y_2' - y_2 y_1') a_2(x)} dx && (3.59)\\ C_{x_2} &= \int \frac{y_1 g(x)}{(y_1 y_2' - y_2 y_1') a_2(x)} dx && (3.60)\\ R(x) = \frac{g(x)}{a_2(x)} \quad &\text{und} \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1' && (3.61)\\ C_{x_1} &= -\int \frac{y_2 R(x)}{W} dx && (3.62)\\ C_{x_2} &= \int \frac{y_1 R(x)}{W} dx && (3.63)\\ \Rightarrow \quad y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W} dx + y_1 \int \frac{y_1 R(x)}{W} dx && (3.64) \end{aligned}$$

[3](lat.) unmittelbares Begreifen, instinktives Erfassen eines Sachverhaltes, plötzliche Idee, Eingebung, hier gemeint: Raten!

Beispiel:

$$\begin{aligned}
x^2y'' - 6y &= x^3 \\
x^2y_h'' - 6y_h &= 0 \\
y_h = x^\lambda &\Rightarrow y_h' = \lambda x^{\lambda-1} \\
\lambda(\lambda-1) - 6 &= 0 \\
y_h &= c_1x^3 + c_2x^{-2} \\
y_p &= C_{x_1}x^3 + C_{x_2}x^{-2} \\
R(x) &= \frac{g(x)}{a_2(x)} \;=\; x \\
W &= y_1y_2' - y_2y_1' \;=\; 5 \\
\Rightarrow\; C_{x_1}' = \frac{1}{5x}\,; &\qquad C_{x_2}' \;=\; -\frac{x^4}{5} \\
y_p &= -y_1\int C_{x_1}dx + y_1\int C_{x_2}dx \\
&= \frac{1}{5}\ln xx^3 + \frac{x^3}{25} \\
y &= c_1x^3 + c_2x^{-2} + \frac{1}{5}\ln xx^3 + \frac{x^3}{25}
\end{aligned}$$

3.5 Schwingungen

3.5.1 Allgemein

Ein schwingendes System wird auch durch Differentialgleichungen beschrieben, hat aber dabei die Besonderheit der Periodizität. Es gilt:

$$x(t) = x(t+T) \tag{3.65}$$

mit der *Schwingungsperiode* T, der *Frequenz* $f = \frac{1}{T}$ und der *Kreisfrequenz* $\omega = \frac{2\pi}{T}$, die den *Rhytmus* der Schwingung beschreiben sowie der *Amplitude*, die für die *Stärke* der Schwingung zuständig ist.

Jede Schwingung läßt sich als eine Reihe harmonischer Schwingungen (Fourier) darstellen.

3.5.2 Phasenkurven bzw. Phasenportrait

Ein Phasenportrait ist die Betrachtung von $\dot{x}$ gegen x. Ein Beispiel:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi) \quad \text{und} \quad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2A^2} = \cos^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t - \varphi) \;=\; 1$$

3.5.3 Gedämpfte Eigenschwingungen

Eine gedämpfte Schwingung hat im Prinzip die folgende Gleichung (hier: Feder-Masse-System):

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \tag{3.66}$$

Die Gegenkraft zu $m\ddot{x}$ setzt sich zusammen aus der Federkraft $-kx$ und dem Dämpfungs- bzw. Reibungsfaktor $-b\dot{x}$. Durch Umformung kommen wir auf eine etwas allgemeinere Form:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.67}$$

$$\frac{b}{m} = 2\delta \quad \text{und} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{3.68}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.69}$$

Bei Verwendung der *dimensionslosen Zeit* $\tau = \omega_0 t$ und dem *Lehnschen Dämpfungsmaß* $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ erhalten wir:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \frac{dx}{d\omega_0 t} \quad \text{und} \quad \delta = \omega_0 D \tag{3.70}$$

$$\Rightarrow \quad x''(\tau) + 2Dx'(\tau) + x(\tau) = 0 \tag{3.71}$$

Gelöst wird die Gleichung über den *Exponentialansatz* $x = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.72}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2} \tag{3.73}$$

Jetzt haben wir wieder die Unterscheidung abhängig davon, ob der Ausdruck unter der Wurzel (Abkürzung: ω_d) größer oder kleiner als Null ist[4].

$\omega_d < 0$: Wir erhalten komplex konjugierte Werte für λ. Nach Einsetzen in die Formeln aus Abschnitt 3.3.2 erhalten wir:

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{R} \tag{3.74}$$

$$= e^{-\delta t} C \sin(\omega_d t + \varphi_d) \tag{3.75}$$

Durch Kenntnis der Anfangswerte $x(t=0) = A > 0$ und $v(t=0) = \dot{x}(0) = 0$ können C und φ_d bestimmt werden:

$$x(t) = A\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \arctan\frac{\omega_0}{\delta}) \tag{3.76}$$

$\omega_d > 0$: Wir erhalten zwei rein reelle Werte für λ:

$$x(t) = c_1 e^{(-\delta+\omega_d)t} + c_2 e^{(-\delta-\omega_d)t} \tag{3.77}$$

[4] Hier kam jetzt eigentlich noch eine Betrachtung der Phasenkurven, die ich hier aber weglasse, weil mich das mittlerweile alles ziemlich nervt. Mut zur Lücke, Leute!